ECUACIONES E INECUACIONES CON MÓDULO

Revisión: intervalos reales

Un ***intervalo***, es un subconjunto del conjunto de los números reales, ℝ. O sea, una parte, una porción de la recta real, determinada por alguna relación de orden.

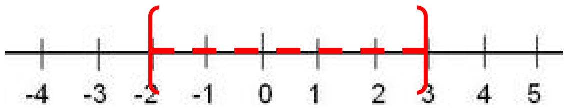
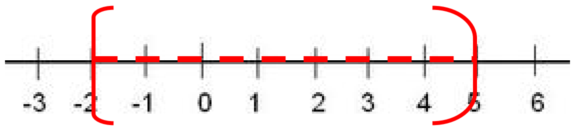
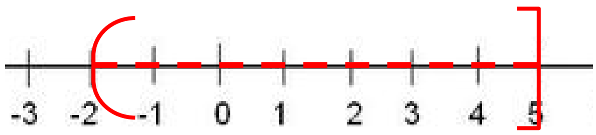
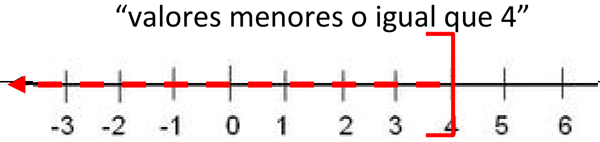
Una relación de orden se establece a través de una desigualdad.

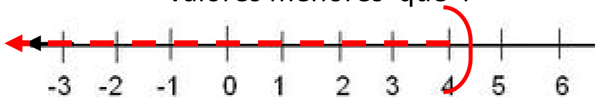
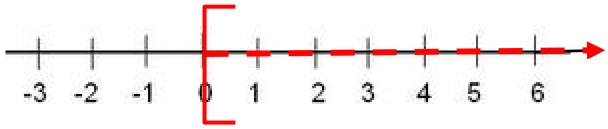
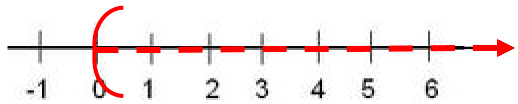
Dados dos números reales $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ (llamados extremos), puede ocurrir:

$$\boldsymbol{a} < b \quad o \quad a \leq b \leq \quad o \quad a > b \quad o \quad a \geq b$$

Para establecer los extremos de dichos intervalos se utilizan paréntesis, si el valor no pertenece al intervalo; o corchetes, si el valor pertenece al intervalo.

Clases de intervalos

Lenguaje formal	Ejemplo
➢ Intervalo abierto $A = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} = (a; b)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 4\} = (-1; 4)$  “valores mayores que -1 y menores que 4”
➢ Intervalo cerrado $A = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\} = [a; b]$	$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 3\} = [-2; 3]$  “valores mayores o igual que -2 y menores o igual que 3”
➢ Intervalos semiabiertos $A = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} = [a; b)$ $A = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\} = (a; b]$	$A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 5\} = [-2; 5)$  “valores mayores o iguales que -2 y menores que 5” $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 5\} = (-2; 5]$  “valores mayores que -2 y menores o igual que 5”
➢ Intervalos infinitos $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\} = (-\infty; b]$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\} = (-\infty; 4]$ “valores menores o igual que 4” 

$A = \{x \in \mathbb{R} / x < b\} = (-\infty; b)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x < 4\} = (-\infty; 4)$ "valores menores que 4" 
$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq b\} = [b; \infty)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0; \infty)$ "valores mayores o iguales que cero" 
$A = \{x \in \mathbb{R} / x > b\} = (b; \infty)$	$A = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} = (0; \infty)$ "valores mayores que cero" 

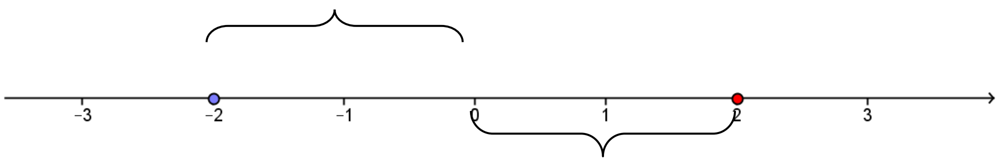
Módulo de un número real

El ***módulo*** o ***valor absoluto*** de un número es el mismo número si este es positivo, o su opuesto si es negativo.

Formalmente	Ejemplo	Lectura
$\lvert x \rvert = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$	$\lvert 2 \rvert = 2$ $\lvert -2 \rvert = -(-2) = 2$	El módulo de dos es dos. El módulo de menos dos es dos.

En cuanto a la representación gráfica, el módulo de un número representa la distancia entre el cero y dicho número.

$$|-2| = 2$$



$$|2| = 2$$

Por representar una distancia, el módulo es un valor mayor o igual a cero.
Existe otra forma de expresar el módulo de un número real, en la que interviene la raíz cuadrada de x^2:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 = 25$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$
$$|x| = 5$$
$$x = 5 \qquad x = -5$$

Ecuaciones e inecuaciones con módulo

✓ **Ejemplo 1**

$$|x+1| = 3$$

$$x + 1 = 3 \quad \vee \quad x + 1 = -3$$

X = 2 ∨ x = -4

∨ : se lee "o"

✓ **Ejemplo 2**

$$3 + 2.|x-2| = 7$$
$$2.|x-2| = 7 - 3$$
$$|x-2| = 4 : 2$$

$$|x-2| = 2$$

Separar en términos y comenzar a despejar hasta dejar solo el módulo

________________ ∨ ________________

________________ ∨ ________________

En general, las ecuaciones con módulo tienen dos soluciones; salvo cuando están igualadas a cero.

Esta situación se formaliza de la siguiente manera, para el ejemplo 1, la solución es:

$$S = \{-4; 2\}$$

Observa que se utilizan llaves para expresar la respuesta, porque se trata de un conjunto en el que estoy enumerando los valores que toma la incógnita. <u>NUNCA</u> utilices paréntesis ni corchetes, porque la solución no es un intervalo real.

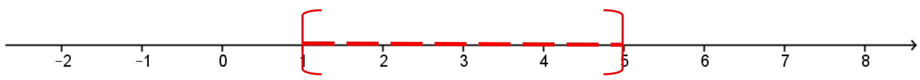
✓ **Ejemplo 3**

(con signo ≤, menos o igual a cero)

$$|x-3| \leq 2$$

$$x - 3 \leq 2 \quad \wedge \quad x - 3 \geq -2$$
$$x \leq 5 \qquad\quad x \geq 1$$

∧ : se lee "y"



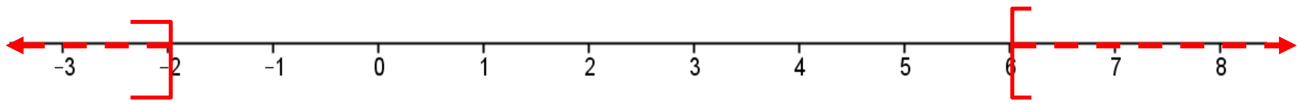
$S = [1;5]$ En este caso la solución es un **intervalo cerrado**, por ello se utilizan los corchetes; y a diferencia de la ecuación, representa el conjunto de los infinitos números reales que se encuentran entre 1 y 5, incluidos estos valores extremos.

- ✓ **Ejemplo 4** (con signo $\geq$, mayor o igual a cero)

$$|x-2| \geq 4$$

$$x-2 \geq 4 \quad \vee \quad x-2 \leq -4$$

$$x \geq 6 \quad \vee \quad x \leq -2$$



$S = (-\infty; -2] \cup [6; \infty)$ La solución se expresa como unión de intervalos infinitos, en este caso cerrados porque los extremos están incluidos.

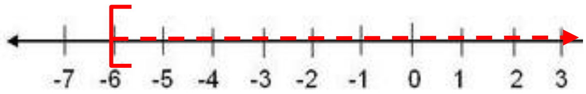
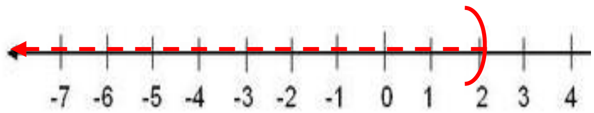
Propiedades del Módulo

Enunciado	Lenguaje formal	Ejemplo
1) El módulo de un número real es igual al módulo de su opuesto, y nunca es negativo.	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert = a \geq 0$	
2) El módulo del producto entre números reales es igual al producto de los módulos de los mismos.	$\lvert a.b\rvert = \lvert a\rvert.\lvert b\rvert$	
3) El módulo del cociente entre números reales es igual al cociente de los módulos de los mismos.	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert} \quad b \neq 0$	

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

INTERVALOS. MÓDULO. ECUACIONES E INECUACIONES

1) Completar la siguiente tabla

Inecuación	Intervalo	Representación
$a)\ -3 \leq x < 4$		
$b)$		
$c)$	$[-1;1]$	
$d)$		
$e)\ \ 0 \leq x \leq 6$		
$f)$ *Todos los números reales mayores que 1 y menores que 4*		
$g)$	$(-3;8]$	
$h)$ *Números mayores o iguales que 5 y menores que 9*		

2) Hallar el módulo o valor absoluto de los siguientes números reales:

$a)\ \left|\sqrt{\frac{4}{9}}\right| =$ ……………………….

$b)\ |(-6)^3| =$ ………………..

$c)\ |\sqrt[3]{-27}| =$ ………………..

$d)\ \left|\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}\right| =$ …………..

$e)\ |-1-8| + 0{,}2 =$ …………

$f)\ \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + \left|1 - \frac{5}{2}\right|\right) =$ …………….

3) Resuelvan las siguientes ecuaciones con módulo:

a) $|x| = 2$

b) $|x| = 16$

c) $|5x| = 10$

d) $|-2x+3| = 7$

e) $(9x+3)^2 = 25$

f) $\left|x - \frac{1}{3}\right| = 4$

k) $|x-4| + 3 = 5$

l) $|3x-1| - 2 = \frac{1}{2}$

m) $|8x+16| - |4x+8| = 8$

n) $|2(x-3)| = |x-3|$

o) $|-3x| + |-x| = 4$

g) $|3x-4|=23$

h) $|2x+1|+\ 3=6$

i) $3=\sqrt{(2x-10)^2}$

j) $\left|\frac{2}{3}x+4\right|-5=2$

p) $|-8|.|-x|=|4(-4)|$

q) $|x+1|+|2+2x|=6$

r) $\frac{|1-x|}{|2|.|-1|}-\left|\frac{2-2x}{-8}\right|=1$

s) $3x^2=x^2+18$

4) *Resuelvan las siguientes inecuaciones con módulo, expresando y graficando el conjunto solución:*

a) $|x|<3$

b) $|x+5|\leq 10$

c) $|3x-2|\leq 8$

d) $|2(x-1)+4|<8$

e) $|x|\leq 5$

f) $|x-6|<15$

g) $|2+3(x-1)|<20$

h) $|x|\geq 3$

i) $|x-4|>5$

j) $|2x-3|>5$

k) $\left|3-\frac{2}{3}x\right|\geq 5$

l) $|x|+8>5$

m) $|-2x+6|>2$

n) $|-5x-2|>13$

o) $|6x+6|-|5x+5|<2$

p) $2|x-9|\geq|x-9|$

q) $-|x-3|+|2x-6|<4$

r) $|2x+4|<2+|x+2|$

s) $|-x|.|-3||2+4|>|-x|+|x|.|-4|^2+6$

<u>CLAVE DE RESPUESTAS</u>

Ejercicio 2)

a) 2/3 b) 216 c) 3 d) 5/2 e) 46/5 f) 1

Ejercicio 3)

a) $S=\{-2;2\}$ b) $S=\{-16;16\}$ c) $S=\{-2;2\}$ d) $S=\{-2;5\}$

e) $S=\left\{\frac{2}{9};-\frac{8}{9}\right\}$ f) $S=\left\{\frac{13}{3};-\frac{11}{3}\right\}$ g) $S=\left\{9;-\frac{19}{3}\right\}$ h) $S=\{1;-2\}$

i) $S=\left\{\frac{13}{2};\frac{7}{2}\right\}$ j) $S=\left\{\frac{9}{2};-\frac{33}{2}\right\}$ k) $S=\{6;2\}$ l) $S=\left\{\frac{7}{6};-\frac{1}{2}\right\}$

m) $S=\{0;-4\}$ n) $S=\{3\}$ o) $S=\{-1;1\}$ p) $S=\{-2;2\}$

q) $S=\{-3;1\}$ r) $S=\{-3;5\}$ s) $S=\{-3;3\}$

Ejercicio 4)

a) $S=(-3;3)$ b) $S=[-15;5]$ c) $S=\left[-2;\frac{10}{3}\right]$

d) $S=(-5;3)$ e) $S=[-5;5]$ f) $S=(-9;21)$

g) $S=\left(-\frac{19}{3};7\right)$ h) $S=(-\infty;-3]\cup[3;\infty)$ i) $S=(-\infty;-1)\cup(9;\infty)$

j) $S=(-\infty;-1)\cup(4;\infty)$ k) $S=(-\infty;-3]\cup[12;\infty)$ l) $\nexists\ x\in\mathbb{R}$

m) $S=(-\infty;2)\cup(4;\infty)$ n) $S=(-\infty;-3)\cup\left(\frac{11}{5};\infty\right)$ o) $S=(-3;1)$

p) $S=\mathbb{R}$ q) $S=(-1;7)$ r) $S=(-4;0)$

s) $S=(-\infty;-6)\cup(6;\infty)$